

TESTS DE FLUX IMPOSES ENTRE VOLUMES

Logiciel KoZiBu

Référence : --	Date : 28 février 2013	Révision : 1.20
Client : --	Auteur : Jean NOËL (JNLOG) 15 place Carnot F-69002 Lyon Tél. : (33)4 78 37 60 03 Site : http://www.jnlog.com Mel : contact@jnlog.com	



Tables des matières

INTRODUCTION	1
I – MISE EN EQUATIONS.....	2
II – VALIDATION	2
II - 1 - CAS 1 : UN DEBIT VOLUMIQUE UNIQUE.....	3
II - 2 - CAS 2 : DEUX DEBITS VOLUMIQUES OPPOSES	4
II - 3 - CAS 3 : UNE RESISTANCE THERMIQUE.....	8
II - 4 - CAS 4 : UN DEBIT VOLUMIQUE ET UNE RESISTANCE THERMIQUE	11
II - 5 - CAS 5 : BOUCLE DE DEBITS VOLUMIQUES	12

INTRODUCTION

Ce rapport décrit dans KoZiBu le système d'équations relatif à des débits imposés entre volumes.

Les données des cas de validation sont rassemblées en un fichier KoZiBu unique (TestsFlow.cdb, avec une extension de type CoDyBa) et le nom des zones correspondant aux différents cas de validation sont listés dans le tableau suivant.

Nom du cas de validation			Nom de la zone dans le fichier KoZiBu
1-Débit volumique unique			Test_QV
2-Deux débits volumiques opposés			Test_QV_QV_Cste
Résistance thermique unique	Matériau de volume = air standard (1.2 kg/m³)	3A-Sans puissance interne	Test_QT_L
		3B-Avec puissance interne	Test_QT_L_Puissance
		3C-Avec paroi	Test_QT_L_Paroi
	Matériau de volume = solide (120 kg/m³)	3A-Sans puissance interne	Test_QT_H
		3B-Avec puissance interne	Test_QT_H_Puissance
		3C-Avec paroi	Test_QT_H_Paroi
4-Débit volumique et résistance thermique uniques			Test_QV_QT
4-Deux débits volumiques opposés (avec Temp. Histogramme)			Test_QV_QV_Sinus (Histogramme)
4-Deux débits volumiques opposés (avec Temp. Courbe)			Test_QV_QV_Sinus (Courbe)
4-Deux débits volumiques opposés (avec Temp. Fichier pas 1 h)			Test_QV_QV_Sinus (Fichier pas=1 heure)
4-Deux débits volumiques opposés (avec Temp. fichier pas 5 min)			Test_QV_QV_Sinus (Fichier pas=5 min)
5-Boucle de débits volumiques			Test_QV_LOOP

I – MISE EN EQUATIONS

Le système d'équations correspond à des débits imposés entre locaux. Ces débits sont imposés par l'utilisateur et ne sont pas fonction des variables du système d'équations.

Le débit pris en compte est un débit volumique, mais comme KoZiBu utilise une masse volumique constante dans le temps pour l'ensemble des volumes, le débit volumique est relié directement au débit massique.

A noter qu'il n'y a pas de vérification par le logiciel de l'équilibrage des débits volumiques pour chaque volume : en effet, l'utilisateur doit s'assurer que les débits « masse » sont à somme nulle pour chaque volume.

Les équations sont donc :

Bilan enthalpique sensible :

$$V_c \cdot \rho_c \cdot C_c \cdot \frac{dT_c}{dt} = \text{Termes usuels} + \sum_{k=1}^{Nb_débits(c)} Q_{c,j,k} (\rho_j \cdot C_j \cdot T_{cavitéj \text{ lié à } c \text{ par } k})$$

avec

T_c	température de la cavité c (en Kelvin)
ρ_j	masse volumique de la cavité j (en kg/m ³)
$Q_{c,j,k}$	k_ième débit volumique de la cavité j vers la cavité c (en m ³ /s)
C_c	capacité calorifique de la cavité c (en J/kg.K)

Bilan enthalpique latent (dans le cas uniquement d'un volume rempli de gaz) :

Le bilan d'enthalpie latent s'obtient en écrivant le bilan massique de la vapeur d'eau contenue dans le volume d'air. La variation de la masse de vapeur d'eau contenue dans l'air de la cavité est égale à la somme des débits volumiques de vapeur et des termes internes de production/disparition :

$$\frac{dm_c^w}{dt} = \sum_{k=1}^{Nb_débits(c)} Q_{c,j,k} \cdot \rho_j^w + \sum_{k=1}^{Nb_sources(c)} \dot{M}_{c,k}$$

avec

m_c^w	masse d'eau contenue dans la cavité c (en kg)
ρ_j^w	masse volumique de la vapeur d'eau de la cavité j (en kg/m ³)
$Q_{c,j,k}$	k_ième débit volumique de la cavité j vers la cavité c (en m ³ /s)
$\dot{M}_{c,k}$	k_ième débit massique de vapeur d'eau de la cavité c (en kg/s)

Le débit massique de vapeur d'eau $\dot{M}_{c,k}$ peut également s'écrire $L \cdot \dot{M}_{c,k} = P_{c,k}$, où L est la chaleur latente de vaporisation de l'eau et P la puissance injectée. En exprimant les masses volumiques de vapeur d'eau en fonction de l'humidité spécifique r et de la masse d'air sec : $m_c^w = m_c^a \cdot r_c$ (soit aussi $\rho_c^w = \rho_c^a \cdot r_c$ car $m_c^a = \rho_c^a \cdot V_c$ et $m_c^w = \rho_c^w \cdot V_c$), où r_c est l'humidité spécifique de l'air (en kg/kg d'air sec), on peut écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{d(\rho_c^a \cdot V_c \cdot r_c)}{dt} = \sum_{k=1}^{Nb_débits(c)} Q_{c,j,k} \cdot (\rho_j^a \cdot r_j) + \sum_{k=1}^{Nb_sources(c)} \frac{P_{c,k}}{L}$$

soit aussi :

$$\rho_c^a \cdot V_c \cdot L \cdot \frac{dr_c}{dt} = \sum_{k=1}^{Nb_débits(c)} Q_{c,j,k} \cdot \rho_j^a \cdot L \cdot r_j + \sum_{k=1}^{Nb_sources(c)} P_{c,k}$$

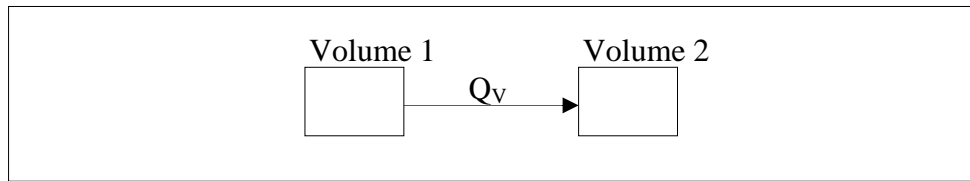
II – VALIDATION

Données utilisées dans la validation : ρ (« air standard ») = 1.2 kg/m³ et ρ (« air solide ») = 120 kg/m³ et C = 1007 J/K.kg. Dans les tests suivants, par défaut la densité est celle de l'air « standard ».

Dans les cas suivants, on considérera tout particulièrement le temps caractéristique τ du système. On considérera que le "bon" pas de temps H, celui à prendre pour la résolution du système, est tel que $H \approx \frac{\tau}{5}$.

II - 1 - CAS 1 : UN DEBIT VOLUMIQUE UNIQUE

Schéma :



Equation : $V_1 \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_1}{dt} = F = -Q_V \cdot \rho \cdot C \cdot (T_1 + T_R)$, T_1 en °C et avec $T_R = 273.15$ K

Solution : $T_1 = -T_R \cdot (1 - e^{-Q/V_1 \cdot t})$ T_1 en °C et $\frac{1}{\tau} = \frac{Q}{V_1}$

Application numérique : $T_{10} = 0$ °C, $V_1 = 40$ m³ et $Q_V = 40$ m³/h

Temps (h)	Analytique		KoZiBu			
	T_1	F	1 min	5 min	15 min	60 min
0	0,00	-3667,5	0	0	0	--
0.25	-60,421	-2856,2	-59,982	-58,311	-54,63	--
0.5	-107,476	-2224,5	-106,79	-104,17	-98,335	--
0.75	-144,123	-1732,4	-143,32	-140,25	-133,3	--
1	-172,664	-1349,2	-171,83	-168,62	-161,27	-136,58
2	-236,183	-496,34	-235,57	-233,15	-227,32	-204,86
3	-259,551	-182,59	-259,21	-257,84	-254,38	-239,01
4	-268,147	-67,17	-267,98	-267,29	-265,46	-256,08
5	-271,31	-24,71	-271,23	-270,91	-270	-264,61
6	-272,473	-9,09	-272,44	-272,29	-271,86	-268,88
7	-272,901	-3,34	-272,89	-272,82	-272,62	-271,02
Ecart maximum			0.83 °C 0.73 %	4.04 °C 3.49 %	11.39 °C 9.58 %	36.08 °C 20.90 %

L'écart relatif est calculé par la formule $E = (T_{\text{Analytique}} - T_{\text{KoZiBu}}) / T_{\text{Analytique}}$. Le traitement de l'humidité ne peut être réalisé ici, compte-tenu des valeurs basses de température.

Commentaire : l'intégration en temps est implicite. Dans le cas ci-dessus, le calcul de la température à deux temps successifs ($T(t+H)$ et $T(t)$) s'écrit : $\frac{T(t+H) - T(t)}{H} = -\frac{1}{\tau} \cdot T(t+H)$ soit $T(t+H) = \frac{1}{1 + \frac{H}{\tau}} \cdot T(t)$

La température calculée T_C et la température analytique T_A s'écrivent alors (exprimées en K) :

$$\frac{T_C(t)}{T(0)} = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \quad t = n \cdot H \quad \text{et} \quad \frac{T_A(t)}{T(0)} = e^{-t/\tau} \quad \text{d'où} \quad \frac{T_C(n \cdot H) - T_A(n \cdot H)}{T_A(n \cdot H)} = e^{n \cdot H/\tau} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1$$

Soient n et H tels que $\tau = n \cdot H$. On a alors : $\frac{T_A(n \cdot H) - T_C(n \cdot H)}{T_A(n \cdot H)} = e \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1$

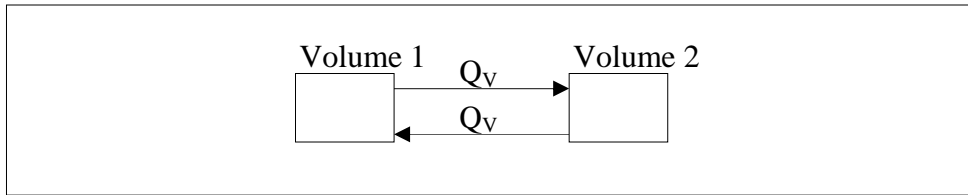
n	60 (H=1 min)	12 (H=5 min)	6 (H=10 min)	5 (H=12 min)	4 (H=15 min)	1 (H=60 min)
Erreur relative	0.83 %	4.03 %	7.80 %	9.24 %	11.3 %	35.9 %

On constate donc que les erreurs relatives observées sur les résultats de calcul sont en accord avec la théorie.

Inversement, on peut considérer qu'un "bon pas en temps" est à prendre tel que $H \approx \frac{\tau}{5}$ (12 min).

II - 2 - CAS 2 : DEUX DEBITS VOLUMIQUES OPPOSES

Schéma :



II - 2 - 1 - VALEURS LIBRES DANS LES DEUX VOLUMES

II - 2 - 1 - 1 - CAS DE LA TEMPERATURE

Equations :

$$\begin{cases} V_1 \cdot \frac{dT_1}{dt} = Q \cdot (T_2 - T_1) \\ V_2 \cdot \frac{dT_2}{dt} = Q \cdot (T_1 - T_2) \end{cases}$$

et donc $V_1 \cdot T_1 + V_2 \cdot T_2 = K = \text{constante}$, $K = T_\infty \cdot (V_1 + V_2)$ avec $T_\infty = \frac{V_1 \cdot T_{10} + V_2 \cdot T_{20}}{V_1 + V_2}$

d'où $V_1 \cdot \frac{dT_1}{dt} = Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_2} (T_\infty - T_1)$ et $V_2 \cdot \frac{dT_2}{dt} = Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1} (T_\infty - T_2)$

Solution :

$$\begin{cases} T_1 = (T_{10} - T_\infty) \cdot e^{-Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1 \cdot V_2} \cdot t} + T_\infty \\ T_2 = (T_{20} - T_\infty) \cdot e^{-Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1 \cdot V_2} \cdot t} + T_\infty \end{cases}, \quad \frac{1}{\tau} = Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1 \cdot V_2}$$

Application numérique : $T_{10} = 0^\circ\text{C}$ et $T_{20} = 33^\circ\text{C}$, $V_1 = 40\text{ m}^3$ et $V_2 = 400\text{ m}^3$, $Q = 40\text{ m}^3/\text{h}$

d'où $T_\infty = 30^\circ\text{C}$, $K = 13200^\circ\text{C} \cdot \text{m}^3$ et

$$\begin{cases} T_1 = 30 \cdot (1 - e^{-\frac{11}{10} \cdot t}) \\ T_2 = 30 + 3 \cdot e^{-\frac{11}{10} \cdot t} \end{cases} \quad \tau = 0.909\text{ h}$$

Temps (h)	Analytique		KoZiBu							
			1 min		5 min		15 min		60 min	
	T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2
0	0,00	33	0,00	33	0,00	33	0,00	33	--	--
0.25	7,213	32,279	7,156	32,28	6,94	32,31	6,47	32,35	--	--
0.5	12,692	31,731	12,61	31,74	12,28	31,77	11,55	31,85	--	--
0.75	16,853	31,315	16,75	31,32	16,38	31,36	15,53	31,45	--	--
1	20,014	30,999	19,91	31,01	19,53	31,05	18,65	31,14	15,71	31,43
2	26,676	30,332	26,61	30,34	26,34	30,37	25,70	30,43	23,2	30,68
3	28,894	30,111	28,86	30,11	28,72	30,13	28,37	30,16	26,76	30,32
4	29,632	30,037	29,62	30,04	29,55	30,04	29,38	30,06	28,45	30,15
5	29,877	30,012	29,87	30,01	29,84	30,02	29,77	30,02	29,26	30,07
6	29,959	30,004	29,96	30	29,95	30,01	29,91	30,01	29,65	30,03
7	29,986	30,001	29,99	30	29,98	30	29,97	30	29,83	30,01
Ecart maximum			0.10 °C 0.35 %	0.01 °C 0.37 %	0.48 °C 1.61 %	0.05 °C 1.70 %	1.36 °C 4.55 %	0.14 °C 4.70 %	4.30 °C 14.34 %	0.43 °C 14.37 %

L'écart relatif est calculé par la formule $E_x = (T_{\text{Analytique}} - T_{\text{KoZiBu}}) / (T_{\text{KoZiBu}} - T_\infty)$.

On peut considérer qu'un pas en temps H tel que $H \approx \frac{\tau}{5}$ (11 min) est un "bon pas en temps".

**II - 2 - 1 - 2 - CAS DE L'HUMIDITE**

Equations :
$$\begin{cases} V_1 \cdot \frac{dH_1^S}{dt} = Q \cdot (H_2^S - H_1^S) \\ V_2 \cdot \frac{dH_2^S}{dt} = Q \cdot (H_1^S - H_2^S) \end{cases} \quad \text{avec } H^S = \frac{m^e}{m^a}$$

H^S est l'humidité spécifique, m^e la masse d'eau et m^a la masse d'air sec.

et donc $V_1 \cdot H_1^S + V_2 \cdot H_2^S = K = \text{constante}$, $K = H_\infty^S \cdot (V_1 + V_2)$ avec $H_\infty^S = \frac{V_1 \cdot H_{10}^S + V_2 \cdot H_{20}^S}{V_1 + V_2}$

d'où $V_1 \cdot \frac{dH_1^S}{dt} = Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_2} (H_\infty^S - H_1^S)$ et $V_2 \cdot \frac{dH_2^S}{dt} = Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1} (H_\infty^S - H_2^S)$

Dans le cas où H_1^S est libre :

Solution :
$$\begin{cases} H_1^S = (H_{10}^S - H_\infty^S) \cdot e^{-Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1 \cdot V_2} \cdot t} + H_\infty^S \\ H_2^S = (H_{20}^S - H_\infty^S) \cdot e^{-Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1 \cdot V_2} \cdot t} + H_\infty^S \end{cases} \quad \text{et } \frac{1}{\tau} = Q \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1 \cdot V_2}$$

Application numérique : $T_{10} = 0^\circ\text{C}$ et $T_{20} = 33^\circ\text{C}$, $V_1 = 40 \text{ m}^3$ et $V_2 = 400 \text{ m}^3$, $Q = 40 \text{ m}^3/\text{h}$, $HR_{10} = 80\%$ et $HR_{20} = 10\%$ (soit $HS_{10} = 0.003010 \text{ g e./g a.s.}$, $HS_{20} = 0.003098 \text{ g e./g a.s.}$, $HS_{\text{inf}} = 0.003090 \text{ g e./g a.s.}$).

Temps (h)	Analytique				KoZiBu							
					1 min		5 min		15 min		60 min	
	T_1	H_1^R	T_2	H_2^R	H_1^R	H_2^R	H_1^R	H_2^R	H_1^R	H_2^R	H_1^R	H_2^R
0	0	80	33	10	80	10	80	10	80	10	--	--
0.25	7,212	48,37	32,278	10,4	48,56	10,4	49,28	10,39	50,88	10,36	--	--
0.5	12,691	33,66	31,73	10,72	33,86	10,72	34,59	10,7	36,27	10,66	--	--
0.75	16,852	25,83	31,314	10,98	26	10,98	26,62	10,95	28,09	10,9	--	--
1	20,013	21,25	30,998	11,17	21,38	11,17	21,89	11,15	23,11	11,09	(2)	(2)
2	26,675	14,3	30,332	11,6	14,36	11,6	14,58	11,58	15,13	11,54	(2)	(2)
3	28,893	12,59	30,11	11,75	12,61	11,75	12,71	11,74	12,97	11,72	(2)	(2)
4	29,631	12,07	30,036	11,79	12,08	11,8	12,13	11,79	12,24	11,78	(2)	(2)
5	29,877	11,9	30,012	11,81	11,91	11,82	11,93	11,81	11,98	11,81	(2)	(2)
6	29,959	11,85	30,004	11,82	11,85	11,82	11,86	11,82	11,88	11,82	(2)	(2)
7	29,986	11,83	30,001	11,82	11,83	11,82	11,84	11,82	11,85	11,82	(2)	(2)
Ecart maximum					0.2 % -- (1)	0.01 % -- (1)	0.93 % -- (1)	0.03 % -- (1)	2.61 % -- (1)	0.08 % -- (1)		

(1) valeur non significative

(2) les valeurs obtenues sont aberrantes, le pas en temps semble trop grand.

L'écart relatif est calculé par la formule $E_x = (H_{\text{Analytique}} - H_{\text{KoZiBu}}) / (H_{\text{KoZiBu}} - H_\infty)$

On peut considérer qu'un pas en temps H tel que $H \approx \frac{\tau}{5}$ (13 min) est un "bon pas en temps".



II - 2 - 2 - VALEURS FORCÉES (SINUSOÏDE) DANS L'UN DES VOLUMES

On impose la valeur suivante de température dans le volume 1 : $T_1 = T_0^a \cdot \cos(\omega \cdot t) + T_0^b$,

et dans ce cas : $T_2 = T_0^b + T_0^a \cdot \left[\frac{a^2}{\omega^2 + a^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{a \cdot \omega}{\omega^2 + a^2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right]$ avec $a = \frac{Q}{V_2}$

On prendra ici $a = 0.1 \text{ h}^{-1}$ et $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{24} \text{ h}^{-1}$, $T_0^a = 30 \text{ °C}$ et $T_0^b = 20 \text{ °C}$.

L'amplitude maxi vaut $T_2 = T_0 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2 + a^2}}$ soit ici 10.704806 °C .

On utilise une fonction cosinus sur une journée (ce qui donne un profil avec 24 valeurs).

II - 2 - 2 - 1 – TEMPERATURE SINUSOÏDALE SOUS FORME D'HISTOGRAMME

La température est donnée sous forme d'un histogramme (c'est-à-dire que la température est constante entre le temps h et $h+1$ heure). Ce choix de profil rend les résultats bien sûr moins proches de la solution.

A noter que dans ce cas le pas en temps doit être d'une heure (et pas moins), car un pas de temps inférieur n'aurait pas de sens compte tenu du fait que les valeurs du profil sont données heure par heure (entre deux valeurs de temps la valeur de la fonction est constante).

Temps (h)	Analytique				KoZiBu			
	T_1	T_2	HR_1	HR_2	T_1	T_2	HR_1	HR_2
0	50	23,81	25,63	61,43	50	24,73	25,63	59,69
1	48,97	26,27	26,53	56,82	48,97	26,94	26,53	55,62
2	45,98	28,3	29,35	53,2	45,98	28,67	29,35	52,57
3	41,21	29,77	34,5	50,7	41,21	29,81	34,5	50,63
4	35	30,57	42,57	49,38	35	30,28	42,57	49,85
5	27,76	30,64	54,15	49,25	27,76	30,05	54,15	50,23
6	19,99	30	69,01	50,32	20	29,14	69,01	51,77
7	12,23	28,67	84,59	52,57	12,23	27,6	84,59	54,44
8	4,99	26,75	94,13	55,96	5	25,55	94,13	58,16
9	-1,21	24,37	88,51	60,38	-1,21	23,11	88,51	62,8
10	-5,98	21,69	63,11	65,6	-5,98	20,47	63,11	68,05
11	-8,97	18,89	25,14	71,25	-8,97	17,79	25,14	73,51
12	-10	16,18	6,27	76,82	-10	15,27	6,27	78,66
13	-8,97	13,72	25,14	81,75	-8,97	13,06	25,14	83,01
14	-5,98	11,69	63,11	85,58	-5,98	11,33	63,11	86,21
15	-1,21	10,22	88,51	88,12	-1,21	10,19	88,51	88,17
16	5	9,42	94,13	89,39	5	9,719	94,13	88,93
17	12,23	9,35	84,59	89,51	12,23	9,947	84,59	88,56
18	20	9,99	69,01	88,49	20	10,86	69,01	87,04
19	27,76	11,32	54,15	86,23	27,76	12,4	54,15	84,27
20	35	13,24	42,57	82,66	35	14,45	42,57	80,29
21	41,21	15,62	34,5	77,94	41,21	16,88	34,5	75,37
22	45,98	18,3	29,35	72,46	45,98	19,53	29,35	69,95
23	48,97	21,1	26,53	66,78	48,97	22,21	26,53	64,57
24	50	23,81	25,63	61,43	50	24,73	25,63	59,69
Ecart maximum					---	5.92 % 1.26 °	---	6.38 % 2.57 %

L'écart relatif est calculé par la formule $E = (T_{\text{Analytique}} - T_{\text{KoZiBu}}) / (\text{Max}(T_{\text{Analytique}}) - \text{Min}(T_{\text{Analytique}}))$.

Le pas en temps de 1 heure reste acceptable.



II - 2 - 2 – 2 – TEMPERATURE SINUSOIDALE SOUS FORME COURBE/FICHER

La température est donnée sous forme d'une courbe (c'est-à-dire que la température est linéaire entre le temps h et $h+1$ heure), ou d'un profil de valeurs lues dans un fichier.

Les simulations ayant montré que l'on obtient exactement les mêmes résultats avec un profil « courbe 1h » et « fichier 1h », on ne présente qu'un seul tableau de résultats.

Temps (h)	Analytique				KoZiBu							
					1 min		5 min		15 min		60 min	
	T_1	T_2	HR_2	HR_2	T_2	HR_2	T_2	HR_2	T_2	HR_2	T_2	HR_2
0	50	23,81	59,69	59,69	23,81		23,87		24,03		24,73	
1	48,97	26,27	55,62	55,62	26,25		26,3		26,41		26,93	
2	45,98	28,3	52,57	52,57	28,26		28,29		28,36		28,66	
3	41,21	29,77	50,63	50,63	29,71		29,72		29,73		29,81	
4	35	30,57	49,85	49,85	30,5		30,49		30,45		30,28	
5	27,76	30,64	50,23	50,23	30,58		30,54		30,44		30,05	
6	19,99	30	51,77	51,77	29,93		29,87		29,73		29,14	
7	12,23	28,67	54,44	54,44	28,61		28,53		28,36		27,61	
8	4,99	26,75	58,16	58,16	26,7		26,61		26,41		25,55	
9	-1,21	24,37	62,8	62,8	24,33		24,24		24,03		23,12	
10	-5,98	21,69	68,05	68,05	21,67		21,58		21,37		20,48	
11	-8,97	18,89	73,51	73,51	18,89		18,82		18,62		17,8	
12	-10	16,18	78,66	78,66	16,19		16,13		15,97		15,27	
13	-8,97	13,72	83,01	83,01	13,75		13,7		13,59		13,07	
14	-5,98	11,69	86,21	86,21	11,74		11,71		11,64		11,34	
15	-1,21	10,22	88,17	88,17	10,29		10,28		10,27		10,19	
16	5	9,42	88,93	88,93	9,5		9,51		9,55		9,72	
17	12,23	9,35	88,56	88,56	9,42		9,46		9,55		9,95	
18	20	9,99	87,04	87,04	10,07		10,13		10,27		10,86	
19	27,76	11,32	84,27	84,27	11,39		11,46		11,64		12,39	
20	35	13,24	80,29	80,29	13,3		13,38		13,59		14,45	
21	41,21	15,62	75,37	75,37	15,67		15,76		15,97		16,88	
22	45,98	18,3	69,95	69,95	18,33		18,42		18,63		19,52	
23	48,97	21,1	64,57	64,57	21,11		21,18		21,38		22,2	
24	50	23,81	59,69	59,69	23,81		23,87		24,03		24,73	
Ecart maximum					0.13 % 0.08 °		0.23 % 0.14 °	x % x %	0.6 % 0.35 °		2.1 % 1.26 °	

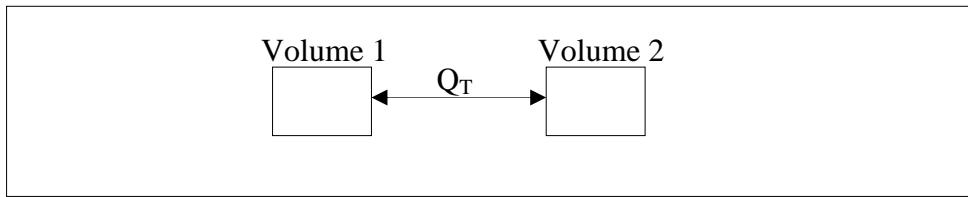
L'écart relatif est calculé par la même formule que pour un profil histogramme.

La précision des résultats est évidemment meilleure avec un profil présentant une meilleure discrétisation (courbe ou fichier) qu'avec un profil « histogramme ».

II - 3 - CAS 3 : UNE RESISTANCE THERMIQUE

II - 3 – 1 - CAS 3A : UNE RESISTANCE THERMIQUE SIMPLE

Schéma :



Equation : $V_1 \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_1}{dt} = F = k \cdot (T_{20} - T_1)$, T_1 et T_{20} en °C et $T_2(t) = T_{20}$

Solution : $T_1 = T_{20} + (T_{10} - T_{20}) \cdot e^{-k/(V_1 \cdot \rho \cdot C) \cdot t}$ T_1 en °C , et $\frac{1}{\tau} = \frac{k}{V_1 \cdot \rho \cdot C}$

Application numérique :

$T_{10} = 100$ °C et $T_{20} = 0$ °C, $V_1 = 40$ m³, $\rho = 1.2$ kg/m³ et $k = 13.426666$ W/K d'où $T_1 = 100 \cdot e^{-t}$, $\tau = 1$ h.

$\rho = 1.2$ kg/m ³ Temps (h)	Analytique		KoZiBu			
			1 min	5 min	15 min	60 min
	T_1	F	T_1	T_1	T_1	T_1
0	100	-1342,67	100,00	100,00	100,00	--
0.25	77,88	-1045,67	78,04	78,65	80,00	--
0.5	60,653	-814,37	60,90	61,86	64,00	--
0.75	47,237	-634,23	47,53	48,66	51,20	--
1	36,788	-493,94	37,09	38,27	40,96	50
2	13,534	-181,71	13,76	14,65	16,78	25
3	4,979	-66,85	5,10	5,61	6,87	12,5
4	1,832	-24,59	1,89	2,15	2,82	6,25
5	0,674	-9,05	0,70	0,82	1,15	3,125
6	0,248	-3,33	0,26	0,31	0,47	1,562
7	0,091	-1,22	0,10	0,12	0,19	0,7812
Ecart maximum			0.30 °C 0.30 %	1.48 °C 1.48 %	4.17 °C 4.17 %	13.21 °C 13.21 %

L'écart relatif est calculé par la formule $E = (T_{\text{Analytique}} - T_{\text{KoZiBu}}) / (T_{10} - T_{20})$.

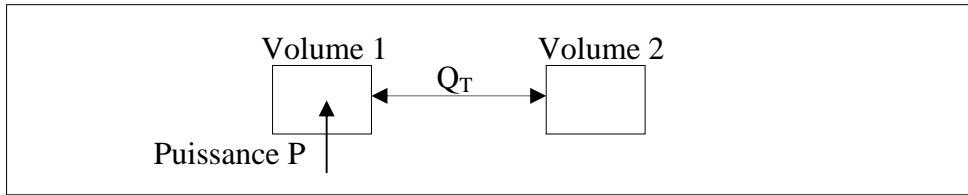
On peut considérer qu'un pas en temps H tel que $H \approx \frac{\tau}{5}$ (12 min) est un "bon pas en temps".

Avec une valeur $\rho = 120$ kg/m³, on obtient la solution exacte sous la forme $T_1 = 100 \cdot e^{-0.01 \cdot t}$, et $\tau = 100$ h

$\rho = 120$ kg/m ³ Temps (h)	Analytique		KoZiBu	
			5 min	60 min
	T_1	F	T_1	T_1
0	100	-1342,67	100,00	100,00
1	99,005	-1329,31	99,01	99,00
2	98,020	-1316,08	98,02	98,02
3	97,045	-1302,98	97,05	97,04
4	96,079	-1290,02	96,08	96,07
5	95,123	-1277,18	95,12	95,11
6	94,176	-1264,48	94,18	94,17
7	93,239	-1251,89	93,24	93,23
Ecart maximum			0.01 °C	0.02 °C

II - 3 – 2 - CAS 3B : UNE RESISTANCE THERMIQUE AVEC SOURCE INTERNE

Schéma :



Equation : $V_1 \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_1}{dt} = P + F = P + k \cdot (T_{20} - T_1)$, T_1 et T_{20} en °C et $T_2(t) = T_{20}$

Solution : $T_1 = T_{20} + \frac{P}{k} + (T_{10} - T_{20} - \frac{P}{k}) \cdot e^{-k/(V_1 \cdot \rho \cdot C) \cdot t}$ T_1 en °C , et $\frac{1}{\tau} = \frac{k}{V_1 \cdot \rho \cdot C}$

Application numérique :

$T_{10} = 100 \text{ °C}$, $T_{20} = 0 \text{ °C}$, $V_1 = 40 \text{ m}^3$, $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $k = 13.426666 \text{ W/K}$, $P = 10 \cdot k \Rightarrow T_1 = 10 + 90 \cdot e^{-t}$, $\tau = 1 \text{ h}$.

$\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ Temps (h)	Analytique		KoZiBu			
	T_1	F	1 min T_1	5 min T_1	15 min T_1	60 min T_1
0	100	-1342,67	100,00	100,00	100,00	--
0,25	80,092	-1075,37	80,24	80,79	82,00	--
0,5	64,588	-867,20	64,81	65,68	67,60	--
0,75	52,513	-705,07	52,78	53,79	56,08	--
1	43,109	-578,81	43,38	44,44	46,86	55
2	22,180	-297,81	22,38	23,18	25,1	32,5
3	14,481	-194,43	14,59	15,04	16,18	21,25
4	11,648	-156,40	11,70	11,93	12,53	15,62
5	10,606	-142,41	11,63	10,74	11,04	12,81
6	10,223	-137,26	10,23	10,28	10,43	11,41
7	10,008	-135,37	10,09	10,11	10,17	10,70
Ecart maximum			0,30 °C 0,30 %	1,40 °C 1,40 %	3,50 °C 3,50 %	11,90 °C 11,90 %

L'écart relatif est calculé par la formule $E = (T_{\text{Analytique}} - T_{\text{KoZiBu}}) / (T_{10} - T_{20})$.

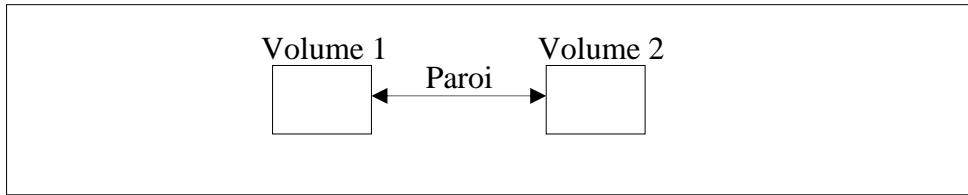
On peut considérer qu'un pas en temps H tel que $H \approx \frac{\tau}{5}$ (12 min) est un "bon pas en temps".

Avec une valeur $\rho = 120 \text{ kg/m}^3$, on obtient la solution exacte sous la forme $T_1 = 100 \cdot e^{-0.01 \cdot t}$, et $\tau = 100 \text{ h}$

$\rho = 120 \text{ kg/m}^3$ Temps (h)	Analytique		KoZiBu	
	T_1	F	5 min T_1	60 min T_1
0	100	-1342,67	100,00	--
0.25	99,775	-1339,65	99,78	--
0.5	99,551	-1336,64	99,55	--
0.75	99,328	-1333,64	99,33	--
1	99,104	-1330,64	99,10	99,11
2	98,218	-1318,74	98,22	98,23
3	97,340	-1306,95	97,34	97,35
4	96,471	-1295,28	96,47	96,49
5	95,611	-1283,73	95,61	95,63
6	94,759	-1272,29	94,76	94,78
7	93,915	-1260,97	93,92	93,94
Ecart maximum			0,01 °C 0,01 %	0,03 °C 0,03 %

II - 3 – 1 - CAS 3C : UNE RESISTANCE THERMIQUE PAR UNE PAROI

Schéma :



Le modèle est physiquement identique à celui du cas précédent. Simplement la résistance globale de la paroi doit être définie en fonction de la résistance thermique.

On prend donc :

- une paroi composée d'une couche très fine de béton (épaisseur de 0.01 mm), de surface 1 m²,
- un coefficient d'échange de 26.85333 W/K.m².

Toutes les autres données sont celles du cas précédent.

Application numérique :

Les données sont identiques à celles du cas précédent (les données de la paroi mis à part).

$\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ Temps (h)	Analytique		KoZiBu 5 min
	T ₁	F	T ₁
0	100	-1342,67	100,00
0.25	77,88	-1045,67	78,76
0.5	60,653	-814,37	62,02
0.75	47,237	-634,23	48,85
1	36,788	-493,94	38,90
2	13,534	-181,71	15,98
3	4,979	-66,85	5,57
4	1,832	-24,59	2,70
5	0,674	-9,05	1,11
6	0,248	-3,33	0,46
7	0,091	-1,22	0,19
Ecart maximum			2.40 °C 2.40 %

L'écart relatif est calculé par la formule $E = (T_{\text{Analytique}} - T_{\text{KoZiBu}}) / (T_{10} - T_{20})$.

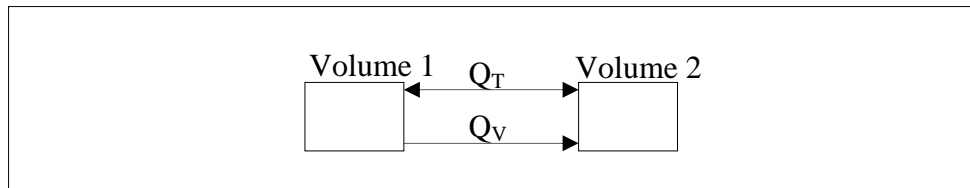
Avec une valeur $\rho = 120 \text{ kg/m}^3$, on obtient :

$\rho = 120 \text{ kg/m}^3$ Temps (h)	Analytique		KoZiBu 5 min
	T ₁	F	T ₁
0	100	-1342,67	100,00
1	99,005	-1329,31	99,01
2	98,020	-1316,08	98,02
3	97,045	-1302,98	97,05
4	96,079	-1290,02	96,08
5	95,123	-1277,18	95,13
6	94,176	-1264,48	94,18
7	93,239	-1251,89	93,25
Ecart maximum			0.02 °C

Commentaires : l'écart est très faible pour une masse volumique importante (« air solide »), du même ordre de grandeur que pour une résistance thermique. Avec une masse volumique plus faible (« air standard »), l'écart est environ deux fois plus important : la raison est que le modèle de paroi « dégradée » introduit une variable de température (température de paroi) et n'est donc pas aussi stable que pour les autres cas de résistance thermique.

II - 4 - CAS 4 : UN DEBIT VOLUMIQUE ET UNE RESISTANCE THERMIQUE

Schéma :



Equation :

$$V_1 \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_1}{dt} = F = k \cdot (T_{20} - T_1) - Q_V \cdot \rho \cdot C \cdot (T_1 + T_R), \quad T_1 \text{ et } T_{20} \text{ en } ^\circ\text{C}$$

Solution :

$$T_1 = T_\infty + (T_{10} - T_\infty) \cdot e^{-\frac{k+Q \cdot \rho \cdot C}{\rho \cdot C \cdot V_1} t} \quad \text{en } ^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T_\infty = \frac{k \cdot T_{20} - Q \cdot \rho \cdot C \cdot T_R}{k + Q \cdot \rho \cdot C}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{k + Q \cdot \rho \cdot C}{\rho \cdot C \cdot V_1}$$

Application numérique :

$T_{10} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$ et $T_{20} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$, $V_1 = 40 \text{ m}^3$, $Q = 40 \text{ m}^3/\text{h}$ et $k = 13.426666 \text{ W/K}$

$T_{\infty} = -86.575 \text{ } ^\circ\text{C}$

$T_1 = -86.575 + 186.575 \cdot e^{-2 \cdot t} \quad \tau = 30 \text{ min.}$

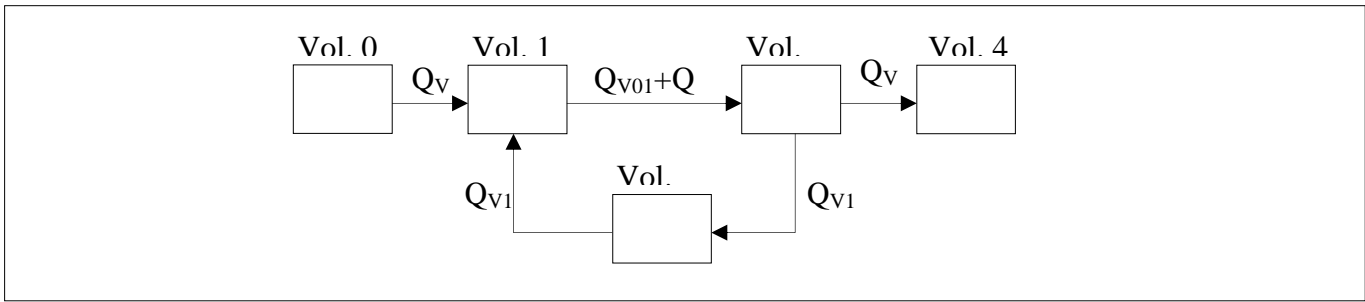
Temps (h)	Analytique		KoZiBu			
			1 min	5 min	15 min	60 min
	T_1	F	T_1	T_1	F	T_1
0	100	-5010,16	100	100	100	100
0.25	26,588	-3038,82	27,51	30,92	37,81	--
0.5	-17,938	-1843,14	-16,81	-12,586	-3,6536	--
0.75	-44,944	-1117,92	-43,915	-39,982	-31,294	--
1	-61,325	-678,05	-60,489	-57,234	-49,722	-24,384
2	-83,158	-91,76	-82,928	-81,961	-79,296	-65,845
3	-86,113	-12,42	-86,066	-85,85	-85,138	-79,666
4	-86,512	-1,68	-86,505	-86,462	-86,292	-84,273
5	-86,567	-0,23	-86,566	-86,558	-86,52	-85,808
6	-86,574	-0,03	-86,575	-86,573	-86,565	-86,32
7	-86,575	0	-86,576	-86,575	-86,574	-86,491
Ecart maximum			1.13 °C 0.60 %	5.35 °C 2.87 %	14.28 °C 7.66 %	36.94 °C 19.80 %

L'écart relatif est calculé par la formule $E = (T_{\text{Analytique}} - T_{\text{KoZiBu}}) / (T_{10} - T_\infty)$.

On peut considérer qu'un pas en temps H tel que $H \approx \frac{\tau}{5}$ (6 min) est un "bon pas en temps".

II - 5 - CAS 5 : BOUCLE DE DEBITS VOLUMIQUES

Schéma :



Equations :

$$\begin{cases} V_1 \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_1}{dt} = Q_{V0} \cdot \rho \cdot C \cdot (T_0 + T_R) - (Q_{V1} + Q_{V0}) \cdot \rho \cdot C \cdot (T_1 + T_R) + Q_{V1} \cdot \rho \cdot C \cdot (T_3 + T_R) \\ V_2 \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_2}{dt} = (Q_{V1} + Q_{V0}) \cdot \rho \cdot C \cdot (T_1 + T_R) - (Q_{V1} + Q_{V0}) \cdot \rho \cdot C \cdot (T_2 + T_R) \\ V_3 \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_3}{dt} = Q_{V1} \cdot \rho \cdot C \cdot (T_2 + T_R) - Q_{V1} \cdot \rho \cdot C \cdot (T_3 + T_R) \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\dot{\bar{T}}(t) = \bar{M} \cdot \bar{T}(t) + \bar{T}_S(t) \quad \text{avec} \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} -\frac{Q_{V1} + Q_{V0}}{V_1} & 0 & \frac{Q_{V1}}{V_1} \\ \frac{Q_{V1} + Q_{V0}}{V_2} & -\frac{Q_{V1} + Q_{V0}}{V_2} & 0 \\ 0 & \frac{Q_{V1}}{V_3} & -\frac{Q_{V1}}{V_3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{T}_S(t) = \begin{bmatrix} \frac{Q_{V0}}{V_1} \cdot T_0(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On prend : $T_0(t) = T_0^a \cdot \cos(\omega \cdot t) + T_0^b$ et donc $\bar{T}_S(t) = \begin{bmatrix} \frac{Q_{V0}}{V_1} \cdot T_0^a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \begin{bmatrix} \frac{Q_{V0}}{V_1} \cdot T_0^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Pour un temps suffisamment grand, la forme générale de la solution est : $\bar{T}(t) = \bar{A} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \bar{B} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \bar{C}$

Soit $\dot{\bar{T}}(t) = -\omega \cdot \bar{A} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot \bar{B} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \bar{M} \cdot \bar{T}(t) + \bar{T}_S^a \cdot \cos(\omega \cdot t) + \bar{T}_S^b$

D'où le système
$$\begin{cases} -\omega \cdot \bar{A} = \bar{M} \cdot \bar{B} \\ \omega \cdot \bar{B} = \bar{M} \cdot \bar{A} + \bar{T}_S^a \\ \bar{M} \cdot \bar{C} = -\bar{T}_S^b \end{cases} \quad \text{d'où} \quad (\omega^2 \cdot \bar{I} + \bar{M} \cdot \bar{M}) \cdot \bar{B} = \omega \cdot \bar{T}_S^a \quad \text{et} \quad \bar{A} = -\frac{1}{\omega} \bar{M} \cdot \bar{B}, \quad \bar{M} \cdot \bar{C} = -\bar{T}_S^b.$$

Comme en II-1-2-1, on utilise une fonction cosinus sur une journée (ce qui donne un profil avec 24 valeurs). Le pas de temps de calcul est horaire.

Le système précédent est donné en température. Le système est identique pour l'humidité spécifique (masse d'eau par unité de masse d'air sec). On prend de même $HS_0(t) = HS_0^a \cdot \cos(\omega \cdot t) + HS_0^b$.

**Application numérique :**

$$V_1 = 40 \text{ m}^3, V_2 = 400 \text{ m}^3, V_3 = 200 \text{ m}^3$$

$$Q_{V0} = 40 \text{ m}^3/\text{h}, Q_{V1} = 40 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$T_0^a = 30^\circ\text{C} \text{ et } T_0^b = 20^\circ\text{C}$$

$$HS_0^a = 0.00995 \text{ g eau/g air sec et } HS_0^a = 0.01005 \text{ g eau/g air sec}$$

Le pas de temps est pris égal à 15 min (un pas horaire ne permet pas d'obtenir des valeurs convergées en humidité).

Le profil de température T_0 est saisi sous forme d'un profil « histogramme ».

t (h)	Analytique								KoZiBu					
	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	HR ₀	HR ₁	HR ₂	HR ₃	T ₁	T ₂	T ₃	HR ₁	HR ₂	HR ₃
0	50	33,16	22,98	17,34	25,63	45,28	63,06	74,43	32,31	21,82	16,92	46,58	65,31	75,25
1	48,97	33,72	24,89	18,55	26,53	44,45	59,39	71,96	33,56	23,84	18,02	44,68	61,37	73
2	45,98	33,33	26,47	19,85	29,35	45,02	56,47	69,3	33,88	25,59	19,26	44,2	58,06	70,48
3	41,21	32,05	27,6	21,16	34,5	47	54,42	66,65	33,25	26,96	20,54	45,14	55,56	67,88
4	34,99	29,93	28,22	22,4	42,57	50,42	53,34	64,2	31,72	27,86	21,79	47,52	53,96	65,38
5	27,76	27,15	28,28	23,47	54,15	55,24	53,24	62,11	29,39	28,22	22,91	51,33	53,34	63,17
6	19,99	23,87	27,77	24,3	69,01	61,33	54,12	60,5	26,42	28,02	23,83	56,55	53,69	61,38
7	12,23	20,33	26,74	24,84	84,59	68,32	55,98	59,48	23,01	27,27	24,49	62,99	55,01	60,12
8	4,99	16,77	25,24	25,05	94,13	75,61	58,73	59,08	19,39	26,03	24,85	70,22	57,27	59,45
9	-1,21	13,43	23,39	24,92	88,51	82,31	62,26	59,34	15,82	24,37	24,87	77,52	60,36	59,41
10	-5,98	10,53	21,3	24,45	63,11	87,61	66,37	60,23	12,54	22,42	24,56	84	64,15	59,99
11	-8,97	8,28	19,13	23,67	25,14	91,03	70,77	61,71	9,754	20,3	23,94	88,85	68,38	61,18
12	-10	6,83	17,01	22,65	6,27	92,75	75,11	63,7	7,674	18,16	23,05	91,77	72,74	62,9
13	-8,97	6,27	15,1	21,44	25,14	93,27	79	66,09	6,428	16,14	21,95	93,1	76,87	65,06
14	-5,98	6,66	13,52	20,14	63,11	92,92	82,12	68,71	6,112	14,39	20,72	93,36	80,39	67,52
15	-1,21	7,94	12,39	18,83	88,51	91,47	84,3	71,39	6,738	13,02	19,44	92,81	83,07	70,12
16	5	10,06	11,77	17,59	94,13	88,39	85,44	73,92	8,271	12,13	18,19	91,02	84,76	72,67
17	12,23	12,84	11,71	16,52	84,59	83,43	85,54	76,11	10,6	11,77	17,07	87,47	85,42	74,97
18	20	16,12	12,22	15,69	69,01	76,93	84,61	77,81	13,57	11,97	16,15	82,03	85,05	76,85
19	27,76	19,66	13,25	15,15	54,15	69,69	82,65	78,9	16,98	12,72	15,49	75,17	83,66	78,2
20	35	23,22	14,75	14,94	42,57	62,58	79,7	79,32	20,59	13,96	15,13	67,79	81,25	78,91
21	41,21	26,56	16,6	15,07	34,5	56,29	75,95	79,05	24,17	15,62	15,11	60,75	77,94	78,96
22	45,98	29,46	18,69	15,54	29,35	51,22	71,67	78,1	27,46	17,57	15,42	54,69	73,95	78,33
23	48,97	31,71	20,86	16,32	26,53	47,54	67,25	76,53	30,24	19,69	16,04	49,92	69,62	77,07
24	50	33,16	22,98	17,34	25,63	45,28	63,06	74,43	32,32	21,83	16,93	46,57	65,31	75,26
Ecart maximum									6.10%	4.61%	3.91%	6.07%	4.61%	3.89%

L'écart relatif est calculé par la formule $E = (V_{\text{Analytique}} - V_{\text{KoZiBu}}) / (\text{Max}(V_{\text{Analytique}}) - \text{Min}(V_{\text{Analytique}}))$, écart calculé pour la température T ou l'humidité relative HR.

Dans le tableau, l'humidité indiquée est l'humidité relative.